TITLE:

選擇理論の立場から見たるデュプイの相對效用について

AUTHOR(S):

園, 正造

CITATION:
園, 正造. 選擇理論の立場から見たるデュプイの相對效用について. 經濟論叢 1943, 57(6): 582-591

ISSUE DATE:
1943-12

URL:
https://doi.org/10.14989/132048

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都帝國大學經濟學會

經濟論叢

第五十七巻第六號

昭和十八年十二月發行

選擇理論の立場から見たる
デュプイの相對效用について

園　正　造

本文は某君が消費者餘剩の研究をせらるるに當り、參考として提供した手記に僅少の改修をなし、夫れに最後の二節を補足したものである。高田博士還暦記念論文集に掲載の小論に引用上の必要を感じ、その附錄としたかつたのであるが、本論すら既に紙數五割の超過なる故、又々無理を願出でて原稿〆切後なるにも拘はらず、本號の一隅を拜用することが出來たのである。茲に謝意を表する次第である。

さて私はデュプイの De la mesure de l'utilité des travaux publics (註) を一見して琴線に觸れるものがあつた。特に一財を以て他財の效用を測らんとする點にある。これ選擇理論に其の必要を痛感してゐたからである。但し mesure を數學的に測度とせず、寧ろ擴義に解して indice (示標) の意味にとつた。彼れの文章は明快であるが、その敍說は肝要な點に理論上、分明を缺く處がある。其の一つは最大犧牲の決定方法と之による他財の效用の測定方法とである。選擇理論の立場から之を明確にし、彼れの着想を稍變更擴張して多財の場合に及ぼしたのが手記である。

デュプイは一財を以て他財の效用を測るが、兩財量の變動の個人に及ぼす利得又は損失を表はす方法を講じない。私は多財の場合について彼れの着想に卽して之をなし、そして私の定義した個人利得と消費者餘剩との關係

註　Bernardi の再製版 De l'utilité et sa mesure (1933) pp. 29—65.

について一言して本文を終ることゝした。

一　最大提供量、限界相對效用

デュプイは財の效用を量的に取扱ふに當り、一物(財の若干量)の效用の測度を表はすに、夫れを獲得するために敢て忍ばんとする犧牲の最大を以てした。いま財Xを提供して他財を獲得する場合、Xの提供を以て犧牲と解し、一個人甲が財X X_1……X_nを夫々 x x_1……x_n單位だけ所有してゐるとき、財

(1)　$X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$

の u_1 u_2……u_n單位を得るために提供せんとするXの最大量をuとする。この最大提供量を決定するに當つて、提供量と獲得量とのみに着目する場合と、取引の前後に於ける所有量を考慮する場合との二通りがある。デュプイは此の點を明かに示してゐない。推測不可能とは言はぬが、敍述の嚴密性を保つために假設として後者に據ることゝする。但しこの假設は任意的のものでなくデュプイの得たる結果と睨合せてのものである。

さて提供の最大量とは、夫れより多くは欲しないが、夫れより少量ならば差支へないとする點である。甲がu單位より多量(u+h 單位)の提供を敢てしないのは交換の前後に於ける所有量、即ち財X X_1……X_nの

$$x-u-h,\ x_1+u_1, \ldots\ldots x_n+u_n \text{ 單位(hは任意の正數)}$$

を一括したものと、現有量とを比較して前者が後者より望ましいと思はないからである。故に甲の選擇函數をφとすれば、

$$\varphi(x-u-h,\ x_1+u_1, \ldots\ldots x_n+u_n) \leqq \varphi(x,\ x_1, \ldots\ldots x_n)$$

となる。同様にuより少量の提供を拒まないことから

$$\varphi(x-u+h,\ x_1+u_1,\ \cdots\cdots x_n+u_n) \geqq \varphi(x,\ x_1,\ \cdots\cdots x_n)$$

となる。兩不等式から等式

$$(2)\qquad \varphi(x-u,\ x_1+u_1,\ \cdots\cdots x_n+u_n) = \varphi(x,\ x_1,\ \cdots\cdots x_n)$$

を得る。これ獲得量と最大提供量との關係を示すものである。

特に獲得量が無限小

$$(3)\qquad dx_1,\ dx_2,\ \cdots\cdots dx_n$$

のときは、最大提供量も亦無限小となる。之を $-dx$（但し無限小の主部）とすれば、(2)より直ちに

$$(4)\qquad \varphi_0 dx+\varphi_1 dx_1+\cdots\cdots+\varphi_n dx_n=0 \qquad \left(\varphi_0=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \varphi_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$$

を得、そして之より

$$(5)\qquad -dx=P_1 dx_1+P_2 dx_2+\cdots\cdots+P_n dx_n$$

を得る。こゝにP_iは財Xに對するX_iの限界置換率を示す。卽ち

$$(6)\qquad P_i=\frac{\varphi_i}{\varphi_0} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots n)$$

デュプイの定義を多財の場合に擴張して言へば、(5)の右邊は財(1)の無限小量(3)を一括したものゝ效用（Xを標準としての）である。これを無限小増分(3)に對する**限界效用**（Xに關する）と呼ぶことゝする。卽ちXが貨幣ならば、財(1)の無限小増分(3)を得るためには、限界效用の表はす數字に相等する金額までは支拂つても差支へないと甲は思つてゐるのである。依つて若し財(1)の價格が夫々 $p_1\ p_2 \cdots\cdots p_n$ で實際に取引したとすれば、これによつて得

る甲の利得、即ちデュプィの相對效用は

（７）　$(P_1-p_1)dx_1+(P_2-p_2)dx_2+\cdots\cdots+(P_n-p_n)dx_n$

となる。これを**限界相對效用**、又は**限界餘剩**と呼び、$d\sigma$ にて示すことゝする。

二　相對效用の二つの測り方

前節末と同様にXを貨幣として他財の價格を

（８）　$p_1,\ p_2, \cdots\cdots p_n$

とする。甲の初期所有量を $\alpha\ \alpha_1\cdots\cdots\alpha_n$ とするとき、右の價格に於ける交換に對する甲の均衡量は聯立方程式

（９）　$x-\alpha+p_1(x_1-\alpha_1)+\cdots\cdots+p_n(x_n-\alpha_n)=0$

(10)　$P_i=p_i \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots n)$

にて決定される。均衡點を $(a,\ a_1, \cdots\cdots a_n)$ とする。

さて此の交換によつて得る相對效用（所謂消費者餘剩）を求めるに當つて二つの方法がある。第一は初期點（之をAと呼ぶ）と均衡點（之をEと名づける）のみに着目し、AよりEに到る徑路は全然考慮しない場合で、第二は途中の徑路をも考へる場合である。第一の場合は等式(2)を用ゐて求め得るが、第二の方は貨幣外一財の場合を除いて、初期點と均衡點のみからは、一般に一意的に定まらない。

三　第一の測り方

均衡點に到達したときに於ける貨幣支出額は $\alpha-a$ で、他財の購入量は夫々

$$a_1-\alpha_1,\ a_2-\alpha_2,\cdots\cdots a_n-\alpha_n$$

である。いま之を得るために支出して差支へなしとする貨幣の最大額をmにて示せば、(2)により

$$(11)\qquad \varphi(\alpha-m,\ a_1,\cdots\cdots a_n)=\varphi(a,\ \alpha_1,\cdots\cdots\alpha_n)$$

となり、そして相對效用は

$$(12)\qquad m-(\alpha-a)=a-(\alpha-m)$$

である。之を幾何學的に見るに、點 $(\alpha-m,\ a_1,\cdots\cdots a_n)$ は、均衡點Eを通りX軸に平行な直線が、初期A點を通る無差別面と交はる點(之をBと名づける)である。依つて相對效用は均衡點の貨幣坐標よりB點の貨幣坐標を減じたる差、即ち線分 BE の大いさを以て表はすことが出來る。

特別の場合として貨幣外一財で、その初期所有量が零ならば、ヒツクスが其の著 Value and Capital の第四十頁に掲げたもの(第39頁の圖で RP)となる。從つて彼れの餘剩の測り方はデュプイから全く獨立であるとは言ひ得ない。

四　第二の測り方

幾何學の用語を用ひて、初期點Aから價格(8)にて微量づつ交換してP點まで來たとし、此の點の坐標(卽ち財の所有量)を $(x,\ x_1,\cdots\cdots x_n)$ とすれば、此の點に於ける限界相對效用 $d\sigma$ は(7)にて與へられる。然るにA、P二點の坐標間には(9)の關係がある。故に貨幣量xを他財の量の函數と見て、$d\sigma$ の係數 P_i-p_i 及び P_j-p_j を夫々 x_j x_i

にて偏微分すれば、其の結果は夫々

$$P_{ij}-P_{io}p_j,\quad P_{ji}-P_{jo}p_i \qquad \left(P_{ij}=\frac{\partial P_i}{\partial x_j},\quad P_{io}=\frac{\partial P_i}{\partial x}\right)$$

となり、この兩者は、均衡點を除いて一般に等しくない。依つて初期點 $A(\alpha,\ \alpha_1, \cdots\cdots \alpha_n)$ より均衡點 $E(a,\ a_1, \cdots\cdots a_n)$ に到る積分 $\int_A^E d\sigma$ は、通路に從つて其の値を異にする。即ち貨幣外二財以上の場合には、初期點Aより均衡點Eに到ることによつて得べき相對效用は、たゞ兩點を知るのみにては一般に求め得ない。之れ價格(8)の交換によつてA點からE點に移るに當り、財量の變動の順序によつて相對效用の異ることを示すもので甚だ重要な點である。併しデュプイの取扱ふ處は貨幣外一財なるを以て、之に觸れる處はない。是に於て多財の場合に相對效用を測らんとするには財量の變動順序、即ち通路をも併せて考へる必要がある。

五　貨幣外一財の場合

この場合印刷の便宜上 α_1 x_1 a_1 p_1 P_1 を夫々 β y b q Q と記るせば、(9)及び $d\sigma$ は

(13) $$x-\alpha+q(y-\beta)=0$$

(14) $$d\sigma=(Q-q)\,dy \qquad \left[Q=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]$$

となる。そして初期點より均衡點に到ることによつて得べき相對效用は

(15) $$\int_A^E d\sigma=\int_\beta^b [Q\{\alpha-q(y-\beta),\ y\}-q]\,dy$$
$$=\int_\beta^b Q\{\alpha-q(y-\beta),\ y\}\,dy-q(b-\beta)$$

である。これに於て

$$(16)\quad Q\{\alpha-q(y-\beta),\ y\}=\pi,\quad y-\beta=D$$

とおけば、πはYを價格qでDだけ購入したときのYの限界效用度を表はし、そして(15)は

$$(17)\quad \int_A^E d\sigma=\int_0^{b-\beta}\pi dD-q(b-\beta)$$

となる。πの値がqに等しくないとき、左記の特別の場合を除いてDはYの價格πに應ずる其の需要量でない。故にこゝに得たる結果は、デュプイの曲線（前掲書第六十三頁の）を均衡論に於ける需要曲線と見れば、彼れのものと一致しない。この曲線と彼れの相對效用の算出法とについては近く檢討を加へられるが、彼れの着想を個人均衡に移す場合には右の如くするを可とする。

特別の場合として貨幣に對する財Yの限界置換率が貨幣量に無關係ならば、こゝに得たる相對效用はマーシャルの消費者餘剩となり、またヒックスの言の如く第一の方法によるものと一致する。至極簡單なることなれども、序に證明を與へておく。此の場合選擇函數は

$$\varphi=F\{x+f(y)\}\qquad〔fはyのみの函數〕$$

となり、從つて　$Q=f'(y)$

$$(18)\quad \int_A^E d\sigma=\int_\beta^b f'(y)dy-q(b-\beta)=f(b)-f(\beta)-\alpha+a$$

となる。他方に於て(11)は

$$F\{\alpha-m+f(b)\}=F\{\alpha+f(\beta)\}$$

となり、之より　$\alpha-m+f(b)=\alpha+f(\beta)\qquad\therefore\ m=f(b)-f(\beta)$

そして第一の方法による相對效用は(12)により

$$m-(\alpha-a)=f(b)-f(\beta)-\alpha+a$$

となる。これ(18)の結果と一致する。

以上によつて、デュプイの相對效用は今日の選擇理論から見て如何なるものなるか、之を大凡そ窺ひ得ることゝ思ふ。彼れは反對を排して效用の測定可能性を主張してゐるやうであるが、例へば彼れの相對效用を示す數字は果して今日の意味に於ける測度を表はすものであるか。こゝに疑問が殘るであらう。また所有量の異る貨幣を標準として他財の效用を測り、夫れを相加することについて反對もあらう。併し之に類したことが屢々世間に行はれることを見れば、無下に排斥も出來ないやうである。最も卑近の一例として試驗の點數制度がある。異る時、異る試驗委員の評點を相加し、平均して受驗者の合格不合格を判定し、また席次を決定する。これ試驗成績の示標(indice)を求める一方法として採用されるものである。デュプイの場合についても財の效用に對して得たる數字を嚴密に測度と解せず、示標の程度に見做して、寧ろ應用の方途を講ずるのも一案でないかと思ふ。

六　個人利得

個人の選擇函數φについて

(19)　$$\frac{d\varphi}{\varphi_0}\left[=dx+P_1dx_1+\cdots\cdots+P_ndx_n\right]$$

は函數φの選び方に對して不變の値を取り、そして括弧內の第二項以下の和は財の無限小增分(3)に對する限界效用、卽ちこの無限小量に對する主觀的價値を標準財量で表はしたものである。そして $\frac{d\varphi}{\varphi_0}$ は之と標準財の增分との和である。故に財の所有量の微變動 $dx, dx_1\cdots\cdots dx_n$ によつて個人は標準財が $\frac{d\varphi}{\varphi_0}$ だけ增加したことに相

當する利得を受けることゝなる。即ち $d\varphi/\varphi_0$ は財の所有量の微變動に伴つて生ずる利得を標準財量で表はしたものである。之を標準財的限界利得と呼ぶことゝする。

いま財の所有量を坐標とする $n+1$ 次元空間を考へ、一點 $A(a, a_1, \ldots\ldots a_n)$ を通つて一つの曲線 Γ を引き、この上に一點 $P(x, x_1, \ldots\ldots x_n)$ を取る。次に財の所有量がAからPまで曲線 Γ に沿ふて變動するとき、之によつて生ずる個人の利得を表はすに、デュプイの相對效用に於けると同樣に、曲線分 AP を細分し、各部分に應ずる限界利得の總和を以てする。即ちこの利得をSにて示せば

$$(20)\qquad S = \int_A^P \frac{d\varphi}{\varphi_0} \quad \text{〔}\Gamma\text{に沿ふて〕}$$

である。そして此の値は積分通路に從つて一般に異る。之れ財の所有量がAからPまで變動するに當り、財量增減の順序によつて個人利得の異ることを示すもので、相對效用の場合と全く同樣である。そして此の事は常識と合致する處がある。併し標準財に對する他財の限界置換率が標準財の量に無關係のとき、即ち $P_{i0}=0$ $(i=1, 2, \ldots\ldots n)$ ならば、計算によつて容易に證明せられる如く、$P_{ij}=P_{ji}$ となり、從つて $d\varphi/\varphi_0$ は全微分となる。依つて此の場合は積分通路に關係なく、始點と終點とによつて個人利得は定まる。

個人利得については前節の相對效用に於けると同樣の異議を生ずるであらうが、限界利得は同一點に於ける微變動に伴ふ個人利得の大小を比較することに用ひられるであらう。私は利得又は限界利得を表面に立たせず、理論の裏面にあつて、論理的に得たる結果の說明に利用し、又は理論的に到達すべき結論の豫想に役立たしめたいと思ふのである。此の點デュプイとは稍立場を異にする。

七　消費者餘剩

第二節に於て甲は價格 $p_1\ p_1 \cdots\cdots p_n$ の交換によつて其の財の所有量が $A(\alpha, \alpha_1, \cdots\cdots \alpha_n)$ から $E(a, a_1, \cdots\cdots a_n)$ に移つた。これによつて得たる彼の利得を求めるに、次の二通りの通路を取る。

(一) Aを通る無差別面上をB(第三節の)まで行き、次に線分 BE 上を進むものとする。

無差別面上では $d\varphi=0$ で、線分 BE 上では $dx_1, dx_2, \cdots\cdots dx_n$ が總て零である。故に(19)に留意して

$$S=\int_A^B \frac{d\varphi}{\varphi_0}+\int_B^E \frac{d\varphi}{\varphi_0}=\int_B^E dx=a-(\alpha-m)$$

卽ち第一の方法による相對效用である。

(二)通路を平面(9)の上に取るとき、

$$dx+p_1dx_1+\cdots\cdots+p_ndx_n=0$$

となる。之を(19)の括弧內に代入すれば

$$\frac{d\varphi}{\varphi_0}=d\sigma \qquad \therefore \int_A^E \frac{d\varphi}{\varphi_0}=\int_A^E d\sigma$$

となり、第二の方法による相對效用である。

右の兩者に限らず、各種の消費者餘剩の定義は個人利得に於ける積分通路を種々に定めたものに過ぎぬ。從つて標準財に對する他財の限界置換率が標準財の數量に無關係の場合には、何れの定義による餘剩も同一の値をとる。何となれば此の場合個人利得は積分通路に無關係なるを以てゞある。第五節に示した處はこの特別の場合に過ぎぬ。

次に初期量又は價格の變動に伴ふ個人利得の變動等に言及すべき順序となるが、此處ではたゞ私の定義した個人利得と消費者餘剩との關係を示すに止めて筆を擱くことゝする。

(昭和十八年十一月十七日)